Adjoints et Auto-ajdoints

I – Adjoint d'un endomorphisme :

Définition :
Soit E un espace vectoriel euclidien et soit u∈ L(E). Il existe un unique endomorphisme u* de E, appelé l'adjoint de u vérifiant : $\forall (x,y)\in E^2$, (u*(x) | y) = (x | u(y)).
De plus, si B est une base orthonormale de E et si U = Mat_B u , alors Mat_B u* = ${}^tU$.

Propriétés découlant de la transposition :
1°) u** = u
2°) $(\alpha_1.u_1 + \alpha_2.u_2)^* = \alpha_1.u_1^* + \alpha_2.u_2^*$
1°) et 2°) ↔ (L'application u↦ u* est un automorphisme involutif de L(E))
3°) $(v \circ u)^* = u^* \circ v^*$
4°) (u est inversible) → (u* est inversible et $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$)
5°) rg (u*) = rg (u)
6°) det (u*) = det (u)
7°) $\forall \lambda \in$ R , det (u – λ.I) = det (u* – λ.I). Donc u et u* ont le même polynôme caractéristique, donc les mêmes valeurs propres avec la même multiplicité.

Propriété :
1°) Ker u* = (Im u)°
2°) Im u* = (Ker u)°
3°) Un sous-espace vectoriel est stable par u si et seulement si son orthogonal est stable par u*.

II – Endomorphismes auto-adjoints :

Définition :
Soit E un espace vectoriel euclidien. On dit qu'un endomorphisme u de E est auto-adjoint (ou symétrique) si et seulement si : $\forall (x,y)\in E^2$, (u(x) | y) = (x | u(y))

Propriété :
Soit u ∈ L(E). (u est auto-adjoint) ↔ (u = u*)

Propriété matricielle :
Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :
1°) u est auto-adjoint
2°) La matrice de u dans une base orthonormale est symétrique
3°) La matrice de u dans n'importe quelle base orthonormale est symétrique

Propriété :
Si u est un endomorphisme auto-adjoint, alors :
1°) Ker u et Im u sont supplémentaire et orthogonaux
2°) Un sous-espace F est stable par u si et seulement si F° est aussi stable par u.

Propriété : (Caractérisation des projecteurs orthogonaux)
Soit $p \in L(E)$. (p est un projecteur orthogonal) $\leftrightarrow$ ($p^2 = p$ et $p^* = p$)

Propriété :
Notons S(E) l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints d'un espace vectoriel euclidien E.
S(E) est un sous-espace vectoriel de L(E).

Propriété :
Si u est un endomorphisme auto-adjoint d'un espace vectoriel euclidien E, alors E est somme directe orthogonale des sous-espaces propres de u : $E = \overset{\perp}{\underset{\lambda \in Sp(u)}{\oplus}} E_\lambda(u)$.
Donc u est diagonalisable et on peut trouver une base orthonormale de vecteurs propres. On dit que "u est diagonalisable dans une base orthonormale".

Remarque : (Traduction matricielle)
Toute matrice réelle symétrique est diagonalisable et on peut trouver une matrice de passage orthogonale. On dit que les matrices symétriques réelles sont "diagonalisables au moyen d'une matrice orthogonale" ou "dans le groupe orthogonal".

Conséquence : (Caractérisation des endomorphismes auto-adjoints)
Si u est auto-adjoint, alors u est diagonalisable dans une base orthonormale.
Réciproquement, si u est diagonalisable dans une base orthonormale B', sa matrice U' dans B' est diagonale, donc symétrique. Donc u est auto-adjoint.
Autrement dit, les endomorphismes auto-adjoints sont les endomorphismes diagonalisables dans un base orthonormale.

Définition :
1°) Soit u un endomorphisme auto-adjoint. On dit que u est :
- positif si et seulement si : $\forall x \in E$, $(x \mid u(x)) \geq 0$
- défini positif si et seulement si : $\forall x \in E$, $x \neq 0 \Rightarrow (x \mid u(x)) > 0$

2°) Soit U une matrice carrée réelle symétrique d'ordre n. On dit que U est :
- positive si et seulement si : $\forall X \in M_{n,1}(R)$, ${}^tX.U.X \geq 0$.
- défini positive si et seulement si : $\forall X \in M_{n,1}(R)$, $X \neq 0 \Rightarrow {}^tX.U.X > 0$.

Remarque :
Si u est un endomorphisme auto-adjoint défini positif, alors l'application φ de ExE dans R : $(x,y) \mapsto (x \mid u(y))$ est un produit scalaire sur E.

Propriété :
Soit u un endomorphisme auto-adjoint. Alors :
1°) (u est positif) $\leftrightarrow$ ($Sp(u) \subset R_+$)
2°) (u est défini positif) $\leftrightarrow$ ($Sp(u) \subset R_+^*$)

III – Automorphismes orthogonaux :

Définition :
Soit E un espace vectoriel euclidien. On dit qu'un endomorphisme u de E est orthogonal si et seulement si il conserve le produit scalaire : $\forall (x,y) \in E^2$, $(u(x) \mid u(y)) = (x \mid y)$

Propriété :
Un automorphisme est orthogonal si et seulement si il conserve la norme : $\forall x \in E$, $\| u(x) \| = \| x \|$.

Propriété : (Caractérisation des automorphismes orthogonaux à l'aide des bases)
Soit $u \in L(E)$, où E est un espace vectoriel euclidien. Les 3 propriétés suivantes sont équivalentes :
1°) u est un automorphisme orthogonal
2°) Il existe une base orthonormale dont l'image par u est une base orthonormale
3°) L'image par u de n'importe quelle base orthonormale est une base orthonormale

Propriété : (Caractérisation des automorphismes orthogonaux à l'aide de l'adjoint)
Soit E un espace vectoriel euclidien et soit $u \in L(E)$. Les 4 propriétés suivantes sont équivalentes :
1°) u est un automorphisme orthogonal
2°) $u^* \circ u = I_E$
3°) $u \circ u^* = I_E$
4°) u est inversible et $u^{-1} = u^*$

Propriété :
Si u est un automorphisme orthogonal, alors $\det u = \pm 1$.

Remarque : (Propriétés des automorphismes orthogonaux relatives aux éléments propres)
Si u est un automorphisme orthogonal, alors :
1°) $Sp(u) \subset \{ -1 , 1 \}$
2°) Les sous-espaces propres associés à +1 et –1 (s'ils existent) sont orthogonaux
3°) Si x est un vecteur propre de u, alors l'hyperplan orthogonal à x ($(\text{vect } x)^\circ$) est stable par u.

Définition et Propriété :
L'ensemble des automorphismes orthogonaux d'un espace vectoriel euclidien E donné est un sous-groupe linéaire de GL(E). On l'appelle groupe orthogonal de E et on le note O(E).

Remarque :
L'ensemble des automorphismes orthogonaux de E de déterminant égal à +1 est un sous-groupe des 2 groupes précédents appelé groupe spécial orthogonal de E et noté SO(E).

Définition :
On dit qu'une matrice carrée réelle d'ordre n U est orthogonale si et seulement si l'endomorphisme de R^n canoniquement associé est un automorphisme orthogonal.

Propriété :
Soit $U \in M_n(R)$. U est une matrice orthogonale si et seulement si les vecteurs colonnes de U sont 2 à 2 orthogonaux et unitaires.

Propriété :
Soit $U \in M_n(R)$, les 4 propriétés suivantes sont équivalentes :
1°) U est une matrice orthogonale
2°) $^tU.U = I_n$
3°) $U.^tU = In$
4°) U est inversible et $U^{-1} = {}^tU$.

Propriété :
L'ensemble des matrices orthogonales d'ordre n est un sous-groupe de $GL_n(R)$ appelé groupe orthogonal d'ordre n et noté O(n) ou $O_n(R)$.

Propriété :
Soit $u \in L(E)$ où E est un espace vectoriel euclidien. Les 3 propriétés suivantes sont équivalentes :
1°) $u \in O(E)$
2°) Il existe une base orthonormale dans laquelle la matrice de u est une matrice orthogonale
3°) La matrice de u dans n'importe quelle base orthonormale est une matrice orthogonale.

Propriété : (Changement de base orthonormale)
Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n. Soit $(e_1,\ldots,e_n)$ une base orthonormale de E. Soit $(e'_1,\ldots,e'_n)$ une famille de vecteurs de E. Soit $U = Mat_{(e_i)}(e'_j)$. Alors :
($(e'_1,\ldots,e'_n)$ est une base orthonormale de E) $\leftrightarrow$ ($U \in O(n)$)

Rappel :
Si E est un espace vectoriel préhilbertien et si F est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Alors F° est le supplémentaire de F et on a donc : $E = F \overset{\perp}{\oplus} F°$. Dans ce cas, on peut définir p_F le projeté orthogonal sur F.

Définition :
1°) Soit E un espace vectoriel euclidien et soit F un sous-espace vectoriel de E. On a donc (cf rappel) $E = F \overset{\perp}{\oplus} F°$. On appelle symétrie orthogonale par rapport à F et on note s_F la symétrie par rapport à F dans la direction de F° : $s_F : E \to E$, $x \mapsto s_F(x) = x_1 - x_2$ où (x_1,x_2) est l'unique couple appartenant à FxF° tel que $x = x_1 + x_2$.
2°) On appelle réflexion une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.

Remarque :
$s_F = 2.p_F - I_E$.

Propriété :
Les symétries orthogonales sont des automorphismes orthogonaux et des endomorphismes auto-adjoints.

Remarque :
Réciproquement, si u est un automorphisme orthogonal et un endomorphisme auto-adjoint, alors u est une symétrie orthogonale.

Propriété :
Le déterminant d'une réflexion est égal à –1.

Propriété :
Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3.
Si r est un automorphisme orthogonal de E, avec det r = +1, alors il existe une base orthonormale directe $(\vec{I},\vec{J},\vec{K})$ telle que la matrice de r dans cette base soit de la forme réduite : $R'=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. On dit que r est la rotation d'angle θ et d'axe dirigé par le vecteur $\vec{K}$.

Remarque :
1°) L'orientation de k'axe est importante : si on remplace $\vec{K}$ par $-\vec{K}$, alors θ est remplacé par –θ
2°) Si on choisit $\vec{I}$ au lieu de $\vec{K}$ comme vecteur directeur de l'axe, on obtient comme matrice réduite : $R''=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$.

Remarque :
Si f est un automorphisme orthogonal de E avec det F = –1, alors on peut trouver une base orthonormale directe $(\vec{I},\vec{J},\vec{K})$ dans laquelle la matrice de f est : $U'=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.
Alors f est la composée commutative d'une rotation d'angle θ autour du vecteur $\vec{K}$ et d'une réflexion par rapport au plan vect$(\vec{I},\vec{J})$

© Archi 2001
http://www.prepasciences.com